

Aufgabe 36: Eigenfrequenzen, Eigenvektoren

Skript: 4.1.2 Systeme mit vielen Freiheitsgraden, 4.1.4 Normalkoordinaten
Literatur: Nolting Band 1 Klassische Mechanik. 3.2.6 Gekoppelte Schwingungen
 Goldstein. Klassische Mechanik. 6.3 Die Frequenzen der freien Schwingung und Normalkoordinaten
 & 6.4 Freie Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls

Gegeben seien die Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_i^2 via

$$\det[K - \omega^2 T] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Matrizen K und T diagonalisieren und bringen Sie die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$

in Normalform.

Hinweise:

- Eine Menge an Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ diagonalisiert eine Matrix M , falls $\tilde{M}$ in der Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ eine Diagonalmatrix ist. Der Basiswechsel ist gegeben durch:

$$\tilde{M} = A^{-1} M A, \quad A := (\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3)$$

- Falls gilt $A^T A = \mathbb{1}$: $\tilde{M} = A^T M A$

Aufgabe 37: Trägheitstensor diskreter Masseverteilungen

Skript: 5.2 Impuls, Drehimpuls und kinetische Energie des starren Körpers

Literatur: Nolting Band 1 Klassische Mechanik. 4.4.2 Kinetische Energie des starren Körpers
& 4.4.3 Eigenschaften des Trägheitstensors

Gegeben sei ein System aus vier Massepunkten mit den Koordinaten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -2a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 2a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie den Massen

$$m_1 = 2m, \quad m_2 = 2m, \quad m_3 = m, \quad m_4 = m.$$

- a) Bestimmen Sie die Komponenten des Trägheitstensors dieses Systems.
- b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.

Aufgabe 38: Trägheitstensor kontinuierlicher Masseverteilungen

Skript: 5.2 Impuls, Drehimpuls und kinetische Energie des starren Körpers

Literatur: Goldstein. Klassische Mechanik. 5.3 Der Trägheitstensor und das Trägheitsmoment
Nolting Band 1 Klassische Mechanik. 4.3.4 Steinerscher Satz

Betrachten Sie einen Würfel der Kantenlänge a und Masse M . Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes und das Trägheitsmoment bezüglich der Rotation um eine der Würfelkanten mithilfe des Satzes von Steiner für die beiden Fälle

- a) Der Würfel besitzt eine homogene Dichte $\rho = \frac{M}{V}$.
- b) Die Masse M des Würfels verteilt sich homogen auf einen Rand der Dicke $\frac{a}{4}$.